L. Bénéteau, J. Chalopin, V. Chepoi et Y. Vaxès : Fonction barycentre des graphes médians

Laurine Bénéteau, LIS, Marseille, `laurine.beneteau@lis-lab.fr`
Jérémie Chalopin, LIS, Marseille, `jeremie.chalopin@lis-lab.fr`
Victor Chepoi, LIS, Marseille, `victor.chepoi@lis-lab.fr`
Yann Vaxès, LIS, Marseille, `yann.vaxes@lis-lab.fr`

Le problème du barycentre consiste, étant donné un graphe $G = (V, E)$ et un ensemble fini de sommets S, à trouver un sommet de G minimisant la fonction barycentre $B_S(v) = \sum_{s \in S} d^2(v, s)$, soit la somme du carré des distances vers tous les sommets de S.

Un graphe $G = (V, E)$ est dit médian si pour tout triplet de sommets u, v, w de V, il existe un unique sommet qui est à la fois sur un plus court chemin de u à v, de u à w et de v à w. Dans un travail précédent, nous avons proposé un algorithme linéaire permettant de calculer la fonction médiane M_S pour un sous-ensemble de sommets S d'un graphe médian G, i.e., de calculer pour tout $v \in V$, $M_S(v) = \sum_{s \in S} d(v, s)$.

Nous proposons un algorithme linéaire qui permet de calculer en chaque sommet v d'un graphe médian G la fonction barycentre $B_S(v)$.

L'algorithme utilise une propriété structurelle fondamentale des graphes médians : on peut partitionner les arêtes par classe d'équivalence avec une fonction Θ. On les appelle des Θ-classes, et la suppression de chacune de ces classes d'équivalence partitionne le graphe en deux sous graphes appelés demi-espaces, qui sont convexes, portés et également médians. Cette partition peut être calculée en temps linéaire.

Ceci nous permet d'appliquer un algorithme récursif dont voici l'idée principale : Étant donné une arête uv, une formule permet d'obtenir la valeur de la fonction barycentre en u à partir de la valeur de la fonction barycentre en v. Cette formule nécessite de connaître la valeur de la fonction médiane en u pour un des demi-espaces définis par l'arête uv. Pour obtenir efficacement cette information, on utilise une propriété qui permet de calculer la valeur de la fonction médiane dans tous les sommets d'un sous-graphe porté H de G en temps proportionnel à la taille de H (et pas à celle de G). On en déduit un algorithme qui calcule la valeur de la fonction barycentre en chaque sommet d'un graphe médian en temps linéaire.