Ensembles localisant-dominants : choix d'orientation

Nicolas Bousquet, Quentin Deschamps, Tuomo Lehtilä et Aline Parreau
Université Lyon 1, LIRIS. Mail : `prenom.nom@univ-lyon1.fr`

Dans un graphe connexe non orienté G à n sommets, un *ensemble localisant-dominant* S est un ensemble dominant tel que pour deux sommets u et v qui ne sont pas dans S, $N(u) \cap S \neq N(v) \cap S$. Pour un graphe orienté D, on définit la notion de manière analogue en considérant uniquement les voisinages entrants [1]. La taille minimale d'un ensemble localisant-dominant dans D (respectivement G) est notée $\gamma_{LD}(D)$ (resp. $\gamma_{LD}(G)$).

Prenant un graphe non orienté G, on s'intéresse à la meilleure et à la pire orientation de G pour ce paramètre. Formellement,

$$\overrightarrow{\gamma}_{LD}(G) = \min\{\gamma_{LD}(D) \text{ pour } D \text{ une orientation de } G\}$$

$$\text{et } \overrightarrow{\Gamma}_{LD}(G) = \max\{\gamma_{LD}(D) \text{ pour } D \text{ une orientation de } G\}.$$

Dans le cas de la meilleure orientation, on peut prouver le théorème suivant, dont la version non orientée ($\gamma_{LD}(G) \leq \frac{n}{2}$) est conjecturée [2].

Théorème 1. *Pour tout graphe G sans jumeaux, $\overrightarrow{\gamma}_{LD}(G) \leq \frac{n}{2}$.*

Il existe de nombreux cas où cette inégalité peut être améliorée. Dans le cas des graphes k-réguliers pour lesquels on prouve que $\overrightarrow{\gamma}_{LD}(G) = \Theta(\frac{\log k}{k} n)$.

Un résultat contre-intuitif est que dans certaines situations, choisir la pire orientation donne un meilleur résultat que de ne pas orienter le graphe.

Théorème 2. *Il existe une infinité de graphes sans jumeaux G_n tels que $\frac{\overrightarrow{\Gamma}_{LD}(G_n)}{\gamma_{LD}(G_n)} \longrightarrow \frac{1}{2}$.*

Enfin, nous établissons des bornes inférieures pour Γ en fonction de n. Ainsi, pour toute classe de graphe χ-bornée nous montrons que $\overrightarrow{\Gamma}_{LD} \geq n^c$ avec c une constante. L'existence d'une famille de graphes tels que $\overrightarrow{\Gamma}_{LD}(G)$ soit au plus une fonction logarithmique de n est une question ouverte.

Références

[1] F. Foucaud, S. Heydarshahi, and A. Parreau. *Domination and location in twin-free digraphs.* Discrete Applied Mathematics, 284 :42–52, 2020.

[2] D. Garijo, A. González, and A. Márquez, *The difference between the metric dimension and the determining number of a graph.* Applied Mathematics and Computation, 249 :487–501,2014.