P. Bergé, G. Ducoffe et M. Habib : Un algorithme sous-quadratique pour les excentricités des graphes médians

Pierre Bergé, LIP, ENS Lyon pierre.berge@ens-lyon.fr
Guillaume Ducoffe, Université de Bucarest, guillaume.ducoffe@ici.ro
Michel Habib, IRIF, Université de Paris, habib@irif.fr

Roditty et Williams [1] ont montré sous l'hypothèse SETH qu'aucun algorithme permet d'obtenir pour tout graphe creux G, en temps sous-quadratique, le diamètre avec un facteur d'approximation plus petit que $\frac{3}{2}$. Un graphe *médian* est un graphe tel que, pour tout triplet u, v, w de noeuds, les intervalles $I(u, v)$, $I(v, w)$, et $I(w, u)$ admettent un unique élément commun, le médian $m(u, v, w)$ de ce triplet. On se concentre ici sur la question suivante : est-ce que les propriétés structurelles des graphes médians permettent de dépasser cette barrière quadratique ?

Nous proposons le premier algorithme calculant exactement l'excentricité $\mathsf{ecc}(u)$ de chaque noeud $u \in V(G)$, *i.e.* $\mathsf{ecc}(u) = \max_{v \in V(G)} d(u, v)$, dans un graphe médian G en temps sous-quadratique. Les graphes médians forment la classe de graphe la plus étudiée en théorie métrique des graphes. En effet, on retrouve fréquemment leur structure dans l'étude des ensembles ordonnés. Ils sont notamment en bijection avec les *CAT(0) cube complexes.* Notre contribution généralise plusieurs résultats obtenus récemment sur certaines sous-familles, notamment sur les graphes médians à dimension d bornée (la dimension du plus grand hypercube induit). Les graphes médians à dimension 1 sont exactement les forêts. Désormais, aucun pré-requis sur la dimension du graphe médian n'est nécessaire pour calculer les excentricités - et donc, le diamètre - en temps sous-quadratique.

Notre algorithme s'exécute en $O(n^{1.6456} \log^{O(1)} n)$, avec $n = |V(G)|$. Il s'appuie sur un autre algorithme que nous proposons, qui détermine les excentricités de tout *graphe simplex* $K(G)$ en temps quasilinéaire. Etant donné un graphe G, son simplex $K(G)$ est le graphe obtenu en considérant comme noeud toute clique induite de G (pas nécessairement maximale) et en reliant deux de ses cliques C, C' si elles diffèrent d'un seul élément, soit $C = C' \cup \{v\}$. Les graphes simplex sont médians et leur dimension est non bornée (l'hypercube de dimension k est le simplex du graphe complet de taille k).

Références

[1] L. Roditty and V. V. Williams, *Fast approximation algorithms for the diameter and radius of sparse graphs*, STOC 2013, 515–524.