F. Galliot, S. Gravier, I. Sivignon : Composantes connexes $(k-2)$-linéaires d'un hypergraphe de rang k

Florian Galliot, Institut Fourier, Grenoble, florian.galliot@univ-grenoble-alpes.fr
Sylvain Gravier, Institut Fourier, Grenoble, sylvain.gravier@univ-grenoble-alpes.fr
Isabelle Sivignon, GIPSA-lab, Grenoble, isabelle.sivignon@grenoble-inp.fr

Un *chemin linéaire* dans un hypergraphe est une suite d'arêtes $(e_1, \ldots, e_L)$ telle que $|e_i \cap e_{i+1}| = 1$ et $e_i \cap e_j = \emptyset$ si $|i-j| > 1$. Notre motivation première est le problème de connectivité associé aux chemins linéaires dans les hypergraphes 3-uniformes (cf. Figure 1). Si l'existence de tels chemins fait l'objet de nombreux résultats extrémaux dans la littérature, aucun outil de nature qualitative, adapté à des hypergraphes moins denses, n'a été développé. Nous étudions ici les composantes connexes linéaires, introduisant pour cela des concepts qui se généralisent aux hypergraphes de rang $k \geq 4$ en remplaçant la linéarité par une notion nouvelle de $(k-2)$-*linéarité*.

Nous définissons un *chemin q-linéaire* dans un hypergraphe H comme une suite d'arêtes $(e_1, \ldots, e_L)$ telle que $|e_i \cap e_{i+1}| \in [\![1, q]\!]$ et $e_i \cap e_j = \emptyset$ si $|i-j| > 1$. Dans ce travail, nous étudions le cas $q = k-2$ où k est le rang de H, c'est-à-dire qu'on interdit dans le chemin les intersections d'arêtes de taille $k-1$. Le cas des chemins linéaires dans les hypergraphes 3-uniformes correspond à $k = 3$ i.e. $q = 1$. Nous présentons deux résultats liés, l'un structurel et l'autre algorithmique : nous décrivons la structure d'*archipel* du sous-hypergraphe induit par une composante connexe $(k-2)$-linéaire, via une preuve algorithmique qui fournit un algorithme de calcul d'une composante connexe $(k-2)$-linéaire en temps $O(m^2k)$ où $m = |E(H)|$.

Mentionnons deux applications du résultat algorithmique. La première résout la complexité du jeu positionnel *Maker-Breaker* sur les hypergraphes de rang 3 : le vainqueur est décidé en temps polynomial. La seconde concerne le problème NP-complet PAFP d'existence d'un chemin induit bleu entre deux sommets donnés d'un graphe arête-bicoloré : il y a correspondance entre chemins $(k-2)$-linéaires dans H et chemins induits bleus dans un *line graph bicoloré* de H, ainsi chaque classe de line graphs bicolorés reconnaissable efficacement mettrait au jour une nouvelle instance polynomiale de PAFP.

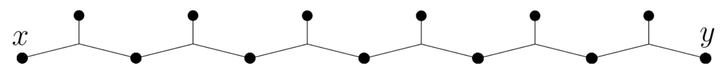

FIGURE 1 – Un chemin linéaire 3-uniforme entre x and y.