C. Gavoille et C. Hilaire : Grilles majeures de graphes déssinés

Cyrille Gavoille, LaBRI, Bordeaux, gavoille@labri.fr
Claire Hilaire LaBRI, Bordeaux, claire.hilaire@labri.fr

Nous considérons le problème suivant, motivé par le théorème d'exclusion de grille comme mineur de Robertson et Seymour :

> *Étant donné un graphe H possédant un dessin planaire en lignes brisées sur une grille $p \times q$, quelle est la plus petite aire $A = A(p, q)$ d'une grille majeure de H ? C'est-à-dire d'une grille possédant H comme mineur.*

Cette version du problème a été soulevée par Dieng et Gavoille [1], qui ont montré que $A(p, q) = O(p^2 q)$. Comme $A(p, q) \geqslant pq$ pour certains graphes H comme une grille $p \times q$ par exemple, on se demande légitimement si la borne supérieure $A(p, q) = O(pq)$ est envisageable pour tout H.

Dans cette étude, nous prouvons que déterminer la plus petite aire d'une grille majeure de H est NP-dificile, mais obtenons la borne voulue pour de nombreuses familles de graphes planaires. Notamment, par un résultat classique de la théorie des mineurs de graphes, H est mineur d'une grille carrée de côté $2|V(H)| - 4$, donc la borne est trivialement vraie si $pq = \Omega(|V(H)|^2)$, c'est-à-dire si le dessin est peu dense. De plus, grâce à un résultat de Dolev, Leighton et Trickey [2], nous montrons que si H est k-planaire extérieur, alors $A = O(kpq)$. La borne $O(pq)$ est donc vraie pour k constant. Enfin, nous proposons une technique qui s'applique à des graphes ayant un dessin dense, c'est-à-dire d'aire $O(|V(H)|)$, sans être $O(1)$-planaire extérieurs.

Références

[1] Y. Dieng and C. Gavoille, *On the treewidth of planar minor free graphs*, in 4th EAI Int'nl Conf. on Innov. and Interdisciplinary Sol. for Underserved Areas (InterSol), vol. 321 of LNICST series, Springer, Cham, Mar. 2020, pp. 238–250.

[2] D. Dolev and F. T. Leighton, and H .W. Trickey, *Planar embedding of planar graphs*, Advances in Computer Research, 2 (1994), 147–161.